SUITES

Trois semaines

Table des matières

ECUE **3**

Motivation **3**

Attendus **3**

1 Définitions et suites usuelles **4**
1.1 Résumé . . . 4
1.2 Exercices . . . 4
Exercice 1.1 . . . 4
Exercice 1.2 . . . 5

2 Autour des suites géométriques **5**
2.1 Résumé . . . 5
2.2 Exercices . . . 5
Exercice 2.3 . . . 5
Exercice 2.4 . . . 5

3 Études de convergence **6**
3.1 Résumé . . . 6
3.2 Exercices . . . 6
Exercice 3.5 . . . 6
Exercice 3.6 . . . 6
Exercice 3.7 . . . 7
Exercice 3.8 . . . 7
Exercice 3.9 . . . 7

4 Suites extraites **7**
4.1 Résumé . . . 7
4.2 Exercices . . . 7
Exercice 4.10 . . . 7
Exercice 4.11 . . . 8
Exercice 4.12 . . . 8
★ Exercice 4.13 . . . 8

5 Comparaisons asymptotiques **8**
5.1 Résumé . . . 8
5.2 Exercices . . . 8
Exercice 5.14 . . . 9

6 Suites récurrentes **10**
6.1 Résumé 10
6.2 Exercices 10
Exercice 6.15 11
Exercice 6.16 11
Exercice 6.17 11
★ Exercice 6.18 12

ECUE

Cette feuille de TD concerne l'ECUE SR : suites réelles.

Les **prérequis** sont

— Les programme de Première et Terminale (essentiellement suites arithmétiques et géométriques, étude de la monotonie, théorème de convergence, calcul de limites...)
— l'ECUE OBM

Motivation

La notion de suite permet d'étendre le concept de liste à des listes de longueur infinie, tout en gardant la propriété d'énumérabilité ; ainsi, pour tout élément appartenant à la suite on est capable de donner son rang, et d'énumérer tous les éléments jusqu'à ce rang.

Si en informatique on parlera aussi de suites finies, notamment pour étudier la convergence en un nombre fini d'étapes d'algorithmes, en mathématiques on se concentrera sur les suites vues comme des applications définies (indicées) sur $\mathbb{N}$.

Elles peuvent être à valeurs dans n'importe quel ensemble, mais ce cours étudiera les ***suites de réels***, c'est-à-dire à valeurs dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

Certains résultats pourront être étendus aux suites à valeurs complexes ; attention néanmoins, tous ceux utilisant des inégalités ne pourront être prolongés dans $\mathbb{C}$ où il n'existe pas d'ordre total compatible avec les opérations algébriques (ainsi, pas de notion de monotonie, d'encadrement, d'intervalle...)

On se concentrera sur deux approches principales des suites : l'approche globale (suites vues comme des éléments, formules explicites, propriétés générales), et l'approche locale (formules de récurrence, étude de termes particuliers, convergence), tout en gardant en mémoire que ces deux angles sont complémentaires et très souvent imbriqués, mais offrent deux points de vue utiles et de natures différentes sur les suites.

Les suites apparaissent naturellement dans tout problème impliquant une itération dont *a priori* on ne connaît pas le nombre d'étapes, ou dans ceux nécessitant une énumération possiblement infinie. Prenons l'exemple d'algorithmes définis par récurrence : pour étudier les résultats mais aussi la convergence éventuelle, on utilise une modélisation par des suites, finies ou infinies, par exemple :

— l'algorithme d'Euclide, bien que fini, se modélise sous forme de suite ;
— l'écriture décimale d'un nombre s'apparente à une suite d'entiers ;
— la recherche par dichotomie approche un résultat par les termes d'une suite (par exemple, la recherche d'un zéro d'une fonction) ;
— les calculs numériques de valeurs (non entières) sont très souvent des suites d'approximations, sous forme de couple (valeur approchée, incertitude) ;
— la complexité d'un algorithme (c'est-à-dire le nombre d'étapes coûteuses lors de l'exécution) ayant en entrée une donnée déterminée par sa taille est décrite par une suite à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Ce TD sera coupé en plusieurs bloc interdépendants, centrés à chaque fois sur une notion particulière. Une section Attendus vous permettra de tester si vous avez acquis les connaissances nécessaires en mettant en relief les parties dans lesquelles elles sont étudiées.

Attendus

Cette section présente une liste des compétences que vous devez maîtriser et sur lesquelles vous serez évalués.

Les AAV détaillés sont les suivants :

— Modéliser un problème de domaines divers (informatique ou vie courante) donné via un calcul de suites numériques.
— Formaliser et utiliser les concepts liés aux suites, en particulier établir une monotonie, une majoration, une mioration par exemple. En particulier :

(a) Détecter si une suite vérifie telle ou telle propriété et être capable de donner des exemples et/ou des contre-exemples.

(b) Exprimer en fonction de n l'expression d'une suite arithmético-géométrique.

(c) Choisir la bonne méthode pour étudier une monotonie.

(d) Manipuler les inégalités afin de majorer et/ou minorer une suite.

— Étudier le comportement à l'infini d'une suite définie explicitement ou par récurrence, notamment une suite modélisant un phénomène : convergence ou divergence, comparaison à une autre suite (notations de Landau). En particulier :

(a) Utiliser le théorème de convergence monotone ou calculer directement la limite.

(b) Manipuler les suites extraites essentiellement les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

(c) Manipuler les notations de Landau afin de comparer deux suites.

(d) Trouver les points fixes d'une suite récurrente et analyser le tableau de variations d'une fonctions afin d'étudier une suite récurrente.

1 Définitions et suites usuelles

1.1 Résumé

Cette partie donne un éventail des propriétés associées aux suites permettant des caractérisations efficaces et la résolution de problèmes généralement modélisés par ces suites. Le but est de se familiariser avec lesdites propriétés : savoir les énoncer, les utiliser, donner des exemples et des contre-exemples.

Ainsi, on introduira notamment les concepts suivants :

— monotonie (variations : croissance, décroissance, stricte ou non) ;
— bornes (minoration, majoration) ;
— périodicité ;
— convergence, divergence.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Donner la définition des propriétés citées avec des quantificateurs puis donner des exemples de suites vérifiant ces propriétés.

1. constante
2. stationnaire
3. majorée, minorée
4. bornée
5. périodique
6. alternée
7. croissante, décroissante ; puis strictement
8. convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$, puis convergente
9. tendant vers $+\infty$, $-\infty$
10. n'ayant pas de limite
11. bornée et non convergente
12. strictement croissante et bornée

Exercice 1.2

Contre-exemples classiques

1. Donner un exemple de suite tendant vers $+\infty$ mais pas croissante.
2. Même question en ajoutant l'hypothèse supplémentaire : pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la suite n'est pas croissante sur $[\![n_0, +\infty[\![$.
3. Donner des exemples de suites non majorées mais qui ne tendent pas vers $+\infty$.
4. Donner un exemple de suite ni majorée ni minorée, et expliquer pourquoi une telle suite ne peut pas avoir de limite.

2 Autour des suites géométriques

2.1 Résumé

Les suites arithmétiques et géométriques sont les premières suites pour lesquelles on fait le lien entre une formule explicite et une formule de récurrence.

Les suites géométriques serviront souvent de suites de référence dans les calculs : pour déterminer des vitesses de convergence/divergence, des majorations asymptotiques ... Ce seront également les premières suites convergentes dont on sait calculer efficacement la limite de la somme des termes et donc l'une des premières références dans les cours sur les séries numériques étudiés en S3. Une grande partie de la notion de séries entières (étudiées également en S3) utilise la proximité desdites séries avec des séries géométriques.

Les suites arithmétiques, de comportement plus simple, sont presque toujours divergentes (c'est-à-dire toujours si l'on excepte les suites constantes), leur utilisation est donc plus rare. Il peut arriver que l'on se serve de telles suites pour obtenir des majorants asymptotiques des complexités divergentes (et en général, plus les données d'un problème sont grandes, plus il faut de temps pour le résoudre, donc les complexités en temps, en fonction de la taille des arguments donnent très souvent des suites divergentes).

2.2 Exercices

Exercice 2.3

1. Soit $q \in \mathbb{R}$. Rappeler $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ en fonction de q ainsi que $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.
2. Discuter du signe d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{5}$.
   (a) Pour quelles valeurs de u_0 une telle suite est-elle constante ? Finalement, quelle équation avez-vous résolue ?
   (b) On note ℓ la valeur trouvée à la question précédente. Montrer que la suite $(v_n) = (u_n - \ell)$ est géométrique et préciser sa raison.
   (c) On prend $u_0 = 5$. Exprimer u_n en fonction de n. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?
   (d) Calculer, en simplifiant le plus possible, $S = \sum\limits_{k=0}^{5} u_k$.

Exercice 2.4

(Travail Maison) Une rumeur sur le programme de révisions de maths se propage dans la classe de S1, mais pas de manière parfaite compte tenu des capacités d'attention fluctuantes des élèves de cette classe : à chaque fois qu'un élève transmet l'information à son voisin, il a une probabilité $p \in]0;1[$ de transmettre ce qu'il a entendu, et $1-p$ de transmettre exactement l'opposé.

On note π_n la probabilité qu'un élève ait la bonne information après qu'elle a été colportée n fois (bien sûr, l'information originelle venant d'un respectable professeur, on a $\pi_0 = 1$).

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la relation entre π_{n+1} et π_n.
2. En déduire une formule explicite pour π_n.
3. Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ? En déduire une remarque utile quant à la pertinence du bavardage en cours.

3 Études de convergence

3.1 Résumé

Les études de convergence sont ce qui commence à vraiment distinguer les suites de simples listes : peut-on analyser le comportement de la suite quand l'indice tend vers $+\infty$? Peut-on assigner une valeur limite, finie ou infinie, à la suite ? Ce problème se pose uniquement [1] au voisinage de $+\infty$: en effet, une suite étant discrète (une liste de termes déconnectés), on n'a jamais de problème pour un terme donné qui est défini et possède une valeur finie. Cette constatation est capitale : les suites ne posent de problème d'analyse qu'en $+\infty$; et les résultats asymptotiques sur les suites restent vrais si les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

Les résultats sur les limites finies ou infinies font intervenir des premières notions de topologie ; les écritures en syntaxe mathématique doivent être vues comme une façon de formaliser une manière intuitive de s'approcher d'une valeur donnée.

Les études de limites permettent de répondre à des questions importantes : un algorithme va-t-il donner une réponse en un temps fini/raisonnable ? Y a-t-il une valeur optimale pour un problème donné ? Un système donné va-t-il atteindre un état de stabilité après un certain nombre d'itérations ? Le lien avec la monotonie et les résultats qui en découlent permet notamment de bien quantifier le comportement de grandeurs importantes liées à un problème donné. Les suites adjacentes permettent quant à elles d'obtenir une suite d'encadrements de valeurs limites difficiles à calculer, que l'on peut raffiner à souhait.

3.2 Exercices

Exercice 3.5

Soit (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Montrer, par récurrence, que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $k! \geq 2^{k-1}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est majorée par 3.
4. La suite est-elle convergente ? Si oui, donner un encadrement de sa limite ℓ.

Exercice 3.6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.

1. Montrer que (u_n) converge, et donner sa limite.
2. Montrer que $(n.u_n)$ converge, et donner sa limite.

1. au contraire des fonctions. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas définie en 0, mais en aucun cas divergente, au contraire de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exercice 3.7

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Montrer que (S_n) est convergente.

Exercice 3.8

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Exercice 3.9

Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$.

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Comment peut-on faire pour obtenir une valeur approchée de la limite commune de ces deux suites à ε près ? Calculer la valeur limite à $0,01$ près.

4 Suites extraites

4.1 Résumé

On n'a pas forcément besoin de tous les termes d'une suite pour bien comprendre son comportement. Quand on analyse par exemple la complexité d'un algorithme, on va chercher les cas les plus favorables et les cas les plus défavorables : le reste est quelque part au milieu, et ne sera utile que si l'on veut avoir la complexité en moyenne.

Il arrive également que le comportement des suites étudiées ne soit pas caractérisé de manière optimale par l'évolution terme à terme : on peut par exemple [2] avoir des suites qui vont osciller autour de certains points, d'autres qui vont visiter plusieurs points alternativement... Les limites possibles pour une suite extraite sont ce que l'on appelle les valeurs d'adhérence d'une suite, elles représentent les points autour desquels la suite va envoyer un nombre infini de termes.

Dans le cas des suites monotones, une sous-suite va aussi permettre de caractériser le comportement asymptotique aussi bien que la suite elle-même, ce qui permet de se réduire aux termes facilement calculables.

4.2 Exercices

Exercice 4.10

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Mettre le bon symbole $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ entre les deux assertions P et Q :

1. $P : u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $Q : u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$
2. $P : u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $Q : \left(u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ et } u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\right)$
3. $P : u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $Q : \left(u_{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \text{ et } u_{3n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\right)$
4. Des questions précédentes, énoncer un résultat mettant en jeu la suite (u_n) ainsi que ses deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). **Vous devrez connaitre ce résultat et vous avez le droit de l'utiliser si besoin.**

2. voir les exercices sur les suites récurrentes à la fin de ce document.

Exercice 4.11

On note $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Quelle est la monotonie de (h_n) ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire $h_{2n} - h_n$ à l'aide du symbole $\sum$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$.
4. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que (h_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 4.12

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

★ **Exercice 4.13**

Soit (u_n) une suite dont les trois sous-suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.
Montrer que (u_n) converge. (indication : il faut utiliser le résultat de l'exercice 4-10).

5 Comparaisons asymptotiques

5.1 Résumé

Les comparaisons asymptotiques servent entre autres à exprimer la complexité des algorithmes : quand on augmente la taille des données (par exemple le nombre de variables dans une équation, la taille d'une matrice, la longueur d'une liste), comment l'algorithme étudié qui utilise ces variables réagit-il ? Il est souvent assez malaisé de donner une valeur exacte pour le nombre d'opérations étant donné qu'il va pouvoir fluctuer assez sensiblement pour des données proches, on va donc plutôt essayer de l'encadrer (pire cas/meilleur des cas). Ainsi, devant le choix de plusieurs algorithmes répondant au même problème, on peut être amené à choisir l'un plutôt que l'autre car on sait qu'il va réaliser moins d'opérations et donc donner la réponse plus rapidement, ou qu'il va utiliser moins d'espace mémoire. Il faut donc savoir classer les différentes complexités (qui s'apparentent à des suites dont l'indice serait la "taille" du problème) pour déterminer lesquelles sont les meilleures, quels algorithmes proposent une réponse en un temps acceptable, savoir faire des compromis entre la précision et le temps de calcul.

5.2 Exercices

En $+\infty$, on peut essayer de comparer deux suites (u_n) et (v_n). Pour cela, les notations suivantes sont utilisées :

Définition : Notation de Landau (à connaitre)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

— On dit que (u_n) est ***négligeable*** devant (v_n) et on écrit [a] $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \ll v_n$ s'il existe une suite (ε_n) telle que, à partir d'un certain rang

$$u_n = v_n \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang [b],

$$u_n = o(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

— On dit que (u_n) est ***dominée*** par (v_n) et on écrit [c] $u_n = O(v_n)$ s'il existe une suite (b_n) bornée telle que, à partir d'un certain rang, $u_n = b_n v_n$.

En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang,

$$u_n = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée}$$

— On dit que (u_n) est ***équivalente*** à (v_n) et on écrit $u_n \sim v_n$ s'il existe une suite (ε_n) telle que, à partir d'un certain rang,

$$u_n = v_n\,(1+\varepsilon_n) \text{ avec } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En particulier, lorsque (v_n) est à termes non nuls à partir d'un certain rang,

$$u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

a. En toute rigueur, on devrait écrire $(u_n) \in o(v_n)$ où $o(v_n)$ est l'ensemble des suites négligeables devant (v_n).

b. En tout rigueur, on devrait écrire $(u_n) = o\big((v_n)\big)$ ou $(u_n) \ll (v_n)$.

c. En toute rigueur, on devrait écrire $(u_n) \in O(v_n)$ où $O(v_n)$ est l'ensemble des suites dominées par (v_n).

Exercice 5.14

1. Que signifient $u_n = o(1)$, $u_n = O(1)$, $u_n = o(0)$ et $u_n \sim 0$?
2. Compléter les points de suspension par $= o$, $= O$ ou $\sim$ sachant qu'il peut y avoir plusieurs possibilités :
   - $\dfrac{n(n+1)}{2} \ \ldots\ n^2$
   - $n \ \ldots\ n^2$
   - $n\sin(n) \ \ldots\ n$
   - $2n^2 - n + 10 \ \ldots\ e^n - n$
   - $-8n^3 + 2n^2 - n + 10 \ \ldots\ -8n^3$
   - $2n^2 - n + 10 \ \ldots\ -n + 10$
   - $n^2 + 3n \ \ldots\ 2n^2 + 3$
   - $n + 1 \ \ldots\ n$

- $\ln(n+1)$ ... $\ln(n)$
- e^{n+1} ... e^n

3. En utilisant la notation [3] $\ll$, classer les termes généraux suivants : $n\ln(n)$; 2^n ; $\ln(n)$; 1 ; n^2 ; n^3 et n.

4. **(Travail Maison)** En utilisant la notation [4] $\ll$, classer les termes généraux suivants : n ; n^2 ; $\ln(n)$; e^n ; $n\ln(n)$ et $\dfrac{n^2}{\ln(n)}$.

5. En utilisant la notation $\ll$, classer les termes généraux suivants : $\dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{n^2}$; $\dfrac{1}{\ln(n)}$; $\dfrac{\ln(n)}{n}$; $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n\ln(n)}$.

6. Déterminer un équivalent simple des termes suivants : $\ln(n)+2n-3$; $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{2e^n-n}{n+1}$.

7. Montrer que $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

   A-t-on $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$? Justifier votre réponse.

8. **(Travail personnel)** Parmi ces trois relations, lesquelles sont des relations d'ordre ou des relations d'équivalence ?

6 Suites récurrentes

6.1 Résumé

La description par récurrence est celle qui correspond le plus à l'approche d'un problème par son évolution : on décrit une suite comme une manière de passer d'un terme au suivant, selon une relation de propagation. D'une description locale on cherche alors à obtenir quelque chose de plus global : le système décrit va-t-il converger ? diverger ? Comment va-t-il se comporter au voisinage de ses valeurs d'adhérence ?

Cette approche répond tout d'abord à un côté pratique : en effet, on sait souvent comment un système donné va se comporter localement, comment il va évoluer d'une étape à l'autre, quelles sont les équations de propagation qui le gouvernent ; l'enjeu est de réussir à extirper une idée plus globale de son comportement.

Mais on peut également attaquer le problème dans l'autre sens : étant donné un système convergeant vers une solution que l'on cherche à calculer, ne peut-on pas le remplacer par un système allant vers la même solution mais de manière plus efficace (convergence plus rapide) ? Ne peut-on pas jouer sur les paramètres pour accélérer les calculs ?

Il importe donc de bien savoir comment utiliser cette modélisation pour d'une part réussir à caractériser les situations qu'elle représente, et d'autre part tirer profit des quantités associées (vitesses de convergence), à la base de nombreux problèmes d'optimisation.

6.2 Exercices

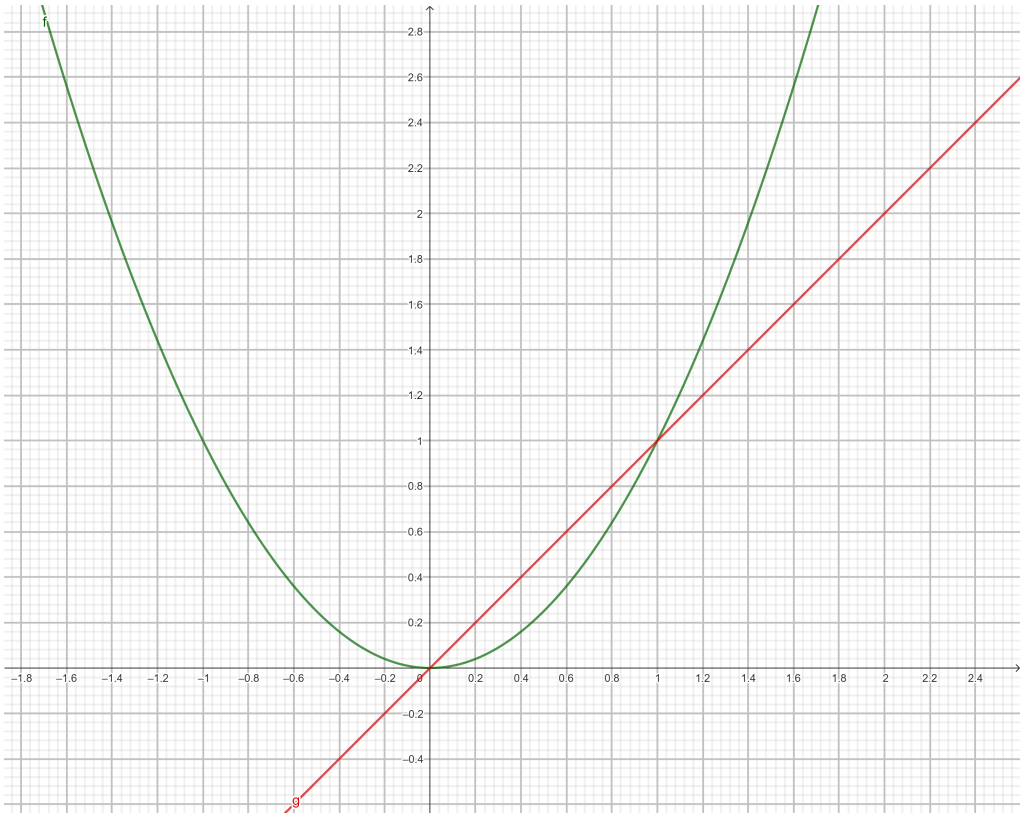
3. Par exemple $\ln(n) \ll n \ll e^n$.
4. Par exemple $\ln(n) \ll n \ll e^n$.

Exercice 6.15

Dans cet exercice, on veut étudier graphiquement la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \longmapsto x^2$.

Dans les 5 cas suivants $u_0 = 0$, $u_0 = 1$, $u_0 = 0,8$, $u_0 = 1,3$ et $u_0 = -1,2$:

1. Dessiner u_0, u_1, u_2, u_3 quand vous pouvez.
2. Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et la comparer à celle de f.
3. Conjecturer le comportement de (u_n) en $+\infty$.



Exercice 6.16

Méthode de Héron pour approcher une racine carrée

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

On s'intéresse à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, et telle que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Vérifier qu'une telle suite est bien définie.
2. Trouver les points fixes de f. Que se passe-t-il si u_0 est un de ces points fixes ?
3. Établir le tableau de variations de f et en déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer qu'à partir du rang 1, la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire qu'elle est convergente, et déduire sa limite.

Exercice 6.17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^2+3}{4}$.

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
2. Trouver les points fixes de f. Que se passe-t-il si u_0 est un de ces points fixes ?
3. Établir le tableau de variations de f.
4. Supposons que $u_0 \in [0, 1[$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.

(b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

(c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

5. Reprendre la question précédente dans les cas où $u_0 \in]3, +\infty[$.
6. **(Travail maison)** Faire le cas $u_0 \in]1, 3[$.

★ **Exercice 6.18**

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall x \in [0, +\infty[\,,\ f(x) = \sqrt{1+x}$.

On s'intéresse aux suites vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \geqslant 0$.
On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

1. Quels sont les points fixes (les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est constante) ?
2. Établir le tableau de variations de f.
3. Montrer que si $u_n < \varphi$ alors $u_{n+1} < \varphi$; et, de même, que si si $u_n > \varphi$ alors $u_{n+1} > \varphi$.
4. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ (on différenciera les deux cas précédents) ; conclure quant à la monotonie de la suite (u_n).
5. En conclure que la suite (u_n) converge et donner sa limite.